Tính chuẩn tắc mở rộng
Extension of normality

Nguyễn Minh Đức

Ngày 1 tháng 1 năm 2019

Tóm tắt nội dung

Trong phần lớn tài liệu, việc định nghĩa lớp ghép và tính chuẩn tắc phu thuộc nhiều vào định lí Larange, dẫn tới việc nhìn nhận các định lí về đồng cấu không được tổng quát và có phần gò bó. Bài viết này mở rông tính chuẩn tắc không áp dung vào định lí Larange để khắc phục những điều trên

1 Mở đầu

-Kiến thức cần chuẩn bị:

- Khái niệm nhóm và các tính chất cơ bản của nhóm, xem trong [1]
- Các quan hệ giữa các nhóm như đồng cấu, nhóm con, ... xem trong [1]
- Nhóm con chuẩn tắc, nhóm thương, xem trong [2]

-Để thuận tiện cho bài viết, tác giả lưu ý rằng khi nói các tính chuẩn tắc trong bài viết này, tác giả coi nó là tính chuẩn tắc mở rộng mà tác giả đang xây dựng, bạn đọc đừng nhầm lẫn với khái niệm chuẩn tắc thông thường
-Một số bổ đề quan trọng trong bài viết:

2 Lớp ghép và tập thương

-Ta định nghĩa lại khái niệm lớp ghép và các tính chất liên quan

Định nghĩa 1. *Cho H là một nhóm con của nhóm G, khi đó $aH = \{ah|h \in H\}$ là một lớp ghép trái của H $\forall a \in G$,tương tự ta có $Ha = \{ha|b \in H\}$ là một lớp ghép phải của H*

Định lý 2.1. $|aH| = |Ha| = |H|$

Chứng minh. Do $f : B \leftrightarrow aH, h \to ah$ là 1 song ánh và $f : H \leftrightarrow Ha, h \to ha$ cũng là một song ánh □

Định lý 2.2. .

- $b \in aH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$
- $aH \cap bH \neq \notin \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$
- $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$

Chứng minh.
- $b \in aH \Leftrightarrow \exists h \in H : b = ah \Leftrightarrow a^{-1}b = h \in H$
- $aH \cap bH \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists h, k \in H : ah = bk \Leftrightarrow a^{-1}b = hk^{-1} \in H$
- $aH = bH \to \exists h, k \in H : ah = bk \to a^{-1}b \in H$
  $a^{-1}b \in H \to \exists h \in H : a^{-1}b = h \to b = ah \to bH = ahH = aH$

□

Định nghĩa 2. *Cho A, H là một nhóm con của G, khi đó tập thương của A với H,kí hiệu là $A : H$,$A : H = \{aH | a \in A\}$*

Định lý 2.3. *(Định lí Larange)*
Nếu $H \leq G$ thì $|G : H| = \frac{|G|}{|H|}$

Chứng minh. Chứng minh của định lí Larange đã được đề cập trong [3] □

Tuy rằng ta không thể xét hợp của các lớp ghép nhưng ta vẫn có thể tính được số phần tử trong nhóm thương $A : H$ như trong cách chứng minh của định lí Larange thông qua định lí sau, đây có thể coi là phiên bản tổng quát của định lí Larange

Định lý 2.4. *(Định lí Larange tổng quát)*
Với mọi $A, H \leq G$,$|A : H| = \frac{|A|}{|A \cap H|}$

Chứng minh. Xét ánh xạ $f : A : A \cap H \to A : H, aA \cap H \to aH$
Ta chứng minh f là một song ánh
Dễ thấy f là toàn ánh
Giả sử $f(aA \cap H) = f(bA \cap H) \Rightarrow aH = bH \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ Mặt khác $a, b \in A \Rightarrow ab^{-1} \in A$ nên $ab^{-1} \in A \cap H$
$\Rightarrow aA \cap H = bA \cap H$ hay f đơn ánh Do đó $|A : H| = |A : A \cap H| = \frac{|A|}{|A \cap H|}$ do định lí Larange

□

Xuất phát từ câu hỏi tại sao ta chỉ định nghĩa tập thương theo lớp ghép trái. Thực tế nếu ta định nghĩa theo lớp ghép phải ta cũng được những tính chất tương tự. Do đó:

Định nghĩa 3. *Đặc số của A trong H là $[A : H]$,có giá trị là $|A : H|$, chính là số phần tử của tập thương định nghĩa theo lớp ghép trái cũng như lớp ghép phải.*

Ta thấy rằng vai trò của nhóm mẹ G không quan trọng, nên ta đưa ra thể một khái niệm mới để làm độc lập các tính chất ta vừa nêu

Định nghĩa 4. *n nhóm $A_1, A_2, ..., A_n$ gọi là chung nếu tồn tại nhóm G chứa tất cả chúng*
Với $n = 2$,nhóm A, B gọi là chung nếu A, B nếu tồn tại nhóm G chứa tất cả chúng

Từ đây ta phát biểu lại định lí 2.4:

Định lý 2.5. *Cho A, H là một hai nhóm chung.Khi đó $[A : H] = \frac{|A|}{|A \cap H|}$*

3 Tính chuẩn tắc-Nhóm thương

Nếu như trong tài liệu [3], ta trình bày tính chuẩn tắc theo $Kerf, Imf$, điều này vô tình gò bó khái niệm này, sử dụng định lí 2.6 trong bài viết [3]

Định nghĩa 5. *Nhóm A, H là hai nhóm chung thỏa mãn:$aH = Ha \forall a \in A$*
Khi đó H gọi là chuẩn tắc trong A. Kí hiệu là $H \trianglelefteq: A$

Định lý 3.1. *Cho A, H là hai nhóm chung,khi $H \trianglelefteq: A$ thì tập tương $A : H$ tạo thành nhóm. Ta gọi là nhóm thương của A với H, kí hiệu là A/H*

Chứng minh. Giả sử $H \trianglelefteq: A$, khi đó $\forall a, b \in H : aH.bH = H.ab.H = ab.H.H = abH$ (do $H.H = H$ theo bổ đề 2.1 trong [3]) □

Ta có một số tính chất của quan hệ chuẩn tắc mở rộng (vẫn chưa khai thác hết):

Định lý 3.2. *Cho $H \trianglelefteq: G$, khi đó H chuẩn tắc trong mọi nhóm con của G*

Chứng minh. Do $aH = Ha \forall a \in G$ nên hiển nhiên $aH = Ha \forall a \in T$ với T là một nhóm con bất kì của G □

Hệ quả 3.3. *$H \trianglelefteq: A, H \trianglelefteq: B$ thì $H \trianglelefteq: A \cap B$*

Định lý 3.4. *Nếu phép toán * giao hoán thì $A \trianglelefteq: B \forall A, B$ là 2 nhóm chung phép toán **

Chứng minh. Áp dụng định nghĩa của tính chuẩn tắc □

Một cách để tìm hiểu tính chất của tính chuẩn tắc mở rộng là xem tính nghiệm đúng của các định lí trong tính chuẩn tắc thường trong tính chuẩn tắc mở rộng:

Định lý 3.5. *(Định lí đồng cấu thứ 2 mở rộng)*
Cho $H \trianglelefteq: A$. Khi đó:$A/H \cong A/A \cap H$

Chứng minh. Xét đồng cấu nhóm $f : A \to A/H, a \to aH$
Dễ thấy $Imf = A/H$
$Kerf = \{x \in A | xH = e_{A/H}\} = \{x \in A | x \in H\} = A \cap H$
Áp dụng định lí đồng cấu thứ nhất : $A/Kerf = Imf$ hay $A/A \cap H \cong A/H$ □

Định lý 3.6. *(Định lí đồng cấu thứ 3 mở rộng)*
Cho $K \trianglelefteq: S \trianglelefteq: T$. Khi đó $S/K \trianglelefteq: T/K$ và $(T/K)/(S/K) = T/S$

Chứng minh. Xét đồng cấu nhóm $f : T/K \to T/S, tK \to tS$
Dễ thấy $Imf = T/S$ và $Kerf = S/K$, áp dụng định lí đồng cấu thứ nhất có đpcm. □

Định lý 3.7. *(Định lí tương ứng-Correspondence theorem)*
Cho $K \trianglelefteq: T, S$. Đặt $S' = S/K, T' = T/K$, khi đó:

- $T \leq S \Leftrightarrow T' \leq S'$, *khi đó* $[S : T] = [S' : T']$
- $T \trianglelefteq: S \Leftrightarrow T' \trianglelefteq: S'$, *khi đó* $S/T = S'/T'$

- $T \trianglelefteq S \Leftrightarrow T' \trianglelefteq S'$, *khi đó* $S/T = S'/T'$

Chứng minh. Phương pháp chứng minh các định lí trên gần giống với phương pháp chứng minh định lí đồng cấu thứ 3 nên tác giả sẽ không trình bày ở đây □

Vì chúng ta đã mở rộng mối quan hệ chuẩn tắc, dẫn tới việc chưa có một cách gián tiếp biểu diễn các nhóm chuẩn tắc trong một nhóm cho trước (như trong tính chuẩn tắc thường, ta có một cách sử dụng đồng cấu để biểu diễn)
Chủ đề này vẫn còn mới, tác giả vẫn đang tiếp tục tìm một phương pháp biểu diễn các nhóm này và tìm hiểu ứng dụng của tính chuẩn tắc mở rộng.

4 Nguồn tham khảo

[1] Nguyễn Minh Đức:"Khái niệm và tính chất của nhóm"
[2] Nguyễn Minh Đức:"Nhóm con chuẩn tắc, nhóm thương"
[3] Joseph J.Rotman:"An Introduction to the Theory of Groups"
[4] Nguyễn Hữu Việt Hưng:"Đại số đại cương"
[5] Evan Chen:"An infinitive large napkin"